Lösungen

1) Immobilienhandel (L)

b) Zunächst wird die Annuität A ermittelt:
$v = \frac{1}{1{,}05}$
$2\,000\,000 = A \cdot v \cdot \frac{1 - v^{15}}{1 - v}$
Mit Technologieeinsatz berechnet: A = € 192.684,58

Zeitpunkt (Jahr)	Annuität A	Zinsenanteil Z (5 %)	Tilgungsanteil T	Restschuld R
0				€ 2.000.000,00
1	€ 192.684,58	€ 100.000,00	€ 92.684,58	€ 1.907.315,42
2	€ 192.684,58	€ 95.365,77	€ 97.318,81	€ 1.809.996,61

2) Anschaffungen (L)

b) Es wird mit dem äquivalenten Halbjahreszinssatz gerechnet:
$\sqrt{1{,}045} - 1 = 0{,}022252415... \approx 2{,}23\ \%$

Semester	Zinsen	Tilgung	Annuität	Restschuld
0				€ 50.000
1	€ 1.112,62	€ 11.387,38	€ 12.500	€ 38.612,62
2	€ 859,22	€ 11.640,78	€ 12.500	€ 26.971,84
3	€ 600,19	€ 11.899,81	€ 12.500	€ 15.072,03
4	€ 335,39	€ 12.164,61	€ 12.500	€ 2.907,42

Die Annuität wird 4-mal eingezahlt. Es bleibt eine Restzahlung von € 2.907,42, die ein weiteres Semester aufgezinst wird. Es sind daher ein Semester nach der letzten Einzahlung noch € 2.972,91 fällig.

3) Seegrundstück (L)

b) Annuität im Jahr 1: 51 467,50 + 53 532,50 = 105 000
Restschuld im Jahr 1: 865 000 – 53 532,50 = 811 467,50
Im Jahr 1 beträgt die Annuität € 105.000 und die Restschuld € 811.467,50.

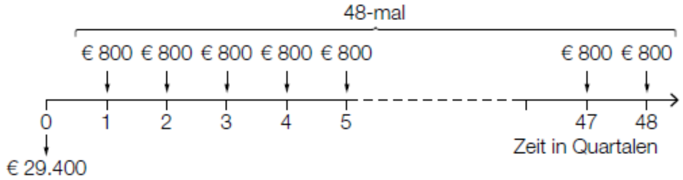
Die Restschuld erhöht sich um die anfallenden Zinsen.

4) Wohnungsrenovierung (L)

a) Bei nominell 4 % p.a. folgt: $i_4 = 1\ \%$.

Es ist mit dem zum unterjährigen Quartalszinssatz i_4 äquivalenten Monatszinssatz zu rechnen, z.B. durch Verwendung des monatlich äquivalenten Aufzinsungsfaktors: $q_{12} = \sqrt[3]{1{,}01}$.
$30\,000 = R \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{120}}$
$R = 303{,}546\ ...$
Die Ratenhöhe beträgt € 303,55.

b)



$30\,000 - 600 = 800 \cdot \frac{q_4^{48} - 1}{q_4 - 1} \cdot \frac{1}{q_4^{48}}$

$q_4 = 1{,}01147...$
$i_{\text{eff}} = 1{,}01147...^4 - 1 = 0{,}04669...$
Der effektive Jahreszinssatz des Angebots beträgt rund 4,67 % p.a.

c) Zusammenhang:

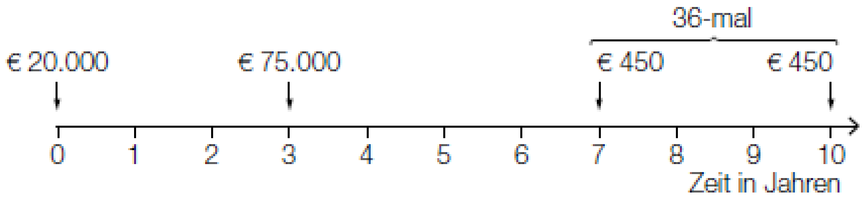
Den **Zinsanteil** einer Periode berechnet man durch Multiplikation der Restschuld der vorangegangenen Periode mit dem angegebenen Zinssatz.

Der **Tilgungsanteil** ist derjenige Teil der Annuität, der zur Tilgung der Schuld beiträgt. (Zinsanteil und Tilgungsanteil ergeben in Summe die Annuität.)

Berechnung des Zinssatzes: $i = \frac{1350}{30000} = 0{,}045 = 4{,}5\ \%$

5) Startkapital (L)

a)



$q_{12} = \sqrt[12]{1{,}021}$

$K_{10} = 20000 \cdot 1{,}021^{10} + 75000 \cdot 1{,}021^{7} + 450 \cdot \frac{q_{12}^{36} - 1}{q_{12} - 1} \cdot q_{12} = 128094{,}522...$

Simon kann nach 10 Jahren € 128.094,52 beheben.

$R \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} = 128094{,}52 \quad \Rightarrow \quad R = 961{,}203...$

Die Ratenhöhe beträgt € 961,20.

b) fehlende Zahl:

2. Zeile Annuität: € 10.332 (aus $Z + T = 1332 + 9000$)

$45000 = R \cdot \frac{1{,}04^5 - 1}{0{,}04} \cdot \frac{1}{0{,}04^5}$

$R = 10108{,}220...$

Die Ratenhöhe beträgt € 10.108,22.

6) Autokauf (L)

a) Die Kontoüberziehung verursacht bei einem Jahreszinssatz von 12 % für 16 Tage Kosten in Höhe von $\frac{16}{360} \cdot 0{,}12 = 0{,}005\dot{3} \approx 0{,}53\ \%$ von € 65.699,50.

Diese sind viel geringer als der angebotene Skonto von 1,5 % der Kaufsumme.

Herr Maier sollte das Angebot des Verkäufers annehmen.

b) $13340 + 922 \cdot \frac{q_{12}^{36} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{36}} + \frac{26000}{q_{12}^{36}} = 66700$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $q_{12} = 1{,}00401...$

$q = (q_{12})^{12} = 1{,}0492...$

Der Zinssatz beträgt rund 4,9 % p. a.

c) $q_{12} = \sqrt[12]{1{,}0506} = 1{,}00412...$

$66700 - 13560 = R \cdot \frac{q_{12}^{60} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{60}}$

$53140 = R \cdot 53{,}0598...$

$R = 1001{,}51$

Die monatlichen Raten betragen jeweils € 1.001,51.

7) Kredit für Wohnung (L)

a) $i_{12} = \sqrt[12]{1{,}03} - 1 = 0{,}002466... \approx 0{,}247\ \%$
Der Monatszinssatz beträgt rund 0,247 %.

monatlicher Aufzinsungsfaktor: $q_{12} = i_{12} + 1$

Barwertformel für nachschüssige Monatsrente:

$120\,000 = R \cdot \frac{q_{12}^{240} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{240}} \Rightarrow R \approx 663{,}088...$

Die Höhe der Monatsraten beträgt € 663,09.

b) Auszahlungsbetrag: $120\,000 \cdot 0{,}98 = 117\,600$

Äquivalenzgleichung: $117\,600 = 2\,650 \cdot \frac{q_4^{60} - 1}{q_4 - 1} \cdot \frac{1}{q_4^{60}}$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $q_4 = 1{,}010475...$
$q = q_4^4 = 1{,}042566...$

Die effektive Jahreszinssatz beträgt rund 4,257 %.

c) Den Quartalszinssatz erhält man, indem man den Zinsanteil im Quartal 1 durch die Kreditsumme dividiert, d. h.:

$i_4 = \frac{1\,200}{120\,000} = 0{,}01 = 1\ \%$

Die Kreditsumme ist der Barwert einer nachschüssigen Rente, die Annuität deren Rate.
Äquivalenzgleichung:

$120\,000 = 2\,186{,}26 \cdot \frac{1{,}01^n - 1}{0{,}01} \cdot \frac{1}{1{,}01^n}$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $n = 80{,}00...$
Die Laufzeit des Kredits beträgt 80 Quartale.

Die Annuität ist die Summe von Zinsanteil und Tilgungsanteil.

d) $q = 1 + i$ ist der jährliche Aufzinsungsfaktor.

Die Formeln sind äquivalent, weil $q^{-n} = \frac{1}{q^n}$.

Werden in der 1. Formel Zähler und Nenner durch q^n dividiert, erhält man die 2. Formel.

8) Kreditrückzahlung (L)

a) Die Höhe der ursprünglichen Schuld kann durch direktes Rückrechnen im Tilgungsplan erfolgen.

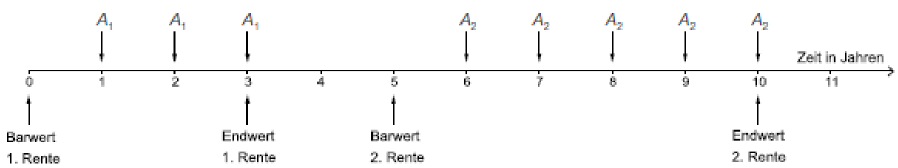
Restschuld des 2. Jahres = € 109.556,81 + € 13.881,45 = € 123.438,26

Zinssatz: $i = \frac{3703{,}15}{123\,438{,}26} = 0{,}030... \approx 3\ \%$

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 150.000,00
1	€ 4.500,00	€ 13.084,60	€ 17.584,60	€ 136.915,40
2	€ 4.107,46	€ 13.477,14	€ 17.584,60	€ 123.438,26
3	€ 3.703,15	€ 13.881,45	€ 17.584,60	€ 109.556,81

Die ursprüngliche Schuld kann auch direkt mithilfe der Rentenrechnung bestimmt werden.

b) Herr Maier bezahlt 3 Jahre lang nachschüssig Annuitäten in Höhe von A_1.
Im 4. und 5. Jahr leistet er keine Zahlungen, dafür bezahlt er ab dem 6. Jahr nachschüssig 5 Annuitäten in Höhe von A_2.



c) Da im 4. und 5. Jahr keine Rückzahlung erfolgt, erhöht sich die Restschuld des 3. Jahres um die Zinsen des 4. und 5. Jahres.

d) Die Rückzahlung entspricht in diesem Fall einer nachschüssigen Rente mit Annuitäten in Höhe von € 17.584,60. Der Barwert der Rente beträgt € 116.228,82.

$$116\,228{,}82 \cdot 1{,}035^n - 17\,584{,}60 \cdot \frac{1{,}035^n - 1}{0{,}035} = 11\,077{,}75$$

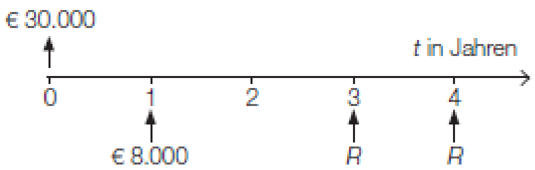
Lösung mittels Technologieeinsatz: $n \approx 7$

Die angegebene Zeile des Tilgungsplans ist daher jene für das Jahr 12.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
12	€ 969,26	€ 16.615,34	€ 17.584,60	€ 11.077,75
13	€ 387,72	€ 11.077,75	€ 11.465,47	€ 0

9) Renovierungskredit (L)

a)



$30\,000 = 8\,000 \cdot 1{,}02^{-1} + R \cdot 1{,}02^{-3} + R \cdot 1{,}02^{-4}$
$R = 11\,872{,}921\ldots$

Die Ratenhöhe beträgt € 11.872,92.

Wenn die Raten früher bezahlt werden, wird die ausstehende Kreditsumme über eine kürzere Zeitspanne verzinst. Daher sind die Raten niedriger.

b) $i_{12} = \sqrt[12]{1 + 0{,}0458} - 1 = 0{,}0037388\ldots$

Der zugehörige monatliche Zinssatz beträgt rund 0,3739 %.

$$B_{nach} = 559{,}11 \cdot \frac{1}{(1 + i_{12})^{60}} \cdot \frac{(1 + i_{12})^{60} - 1}{i_{12}} = 30\,000{,}132\ldots$$

$B_{vor} = B_{nach} \cdot (1 + i_{12}) = 30\,112{,}297\ldots$

Es handelt sich um eine nachschüssige Ratenzahlung.

c) $3\,480 \cdot 0{,}9 = 3\,132$

Unter Berücksichtigung des Annuitätenzuschusses muss Frau Eberharter Halbjahresraten in Höhe von € 3.132 bezahlen.

$$30\,000 = 3\,132 \cdot \frac{1}{(1 + i_2)^{10}} \cdot \frac{(1 + i_2)^{10} - 1}{i_2}$$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $i_2 = 0{,}007906\ldots$
$i = (1 + i_2)^2 - 1 = 0{,}01587\ldots \approx 1{,}59\ \%$

Der effektive Jahreszinssatz beträgt rund 1,59 %.

Die Verzinsung beträgt 0 %, wenn die Halbjahresraten $\frac{€\ 30.000}{10} = €\ 3.000$ betragen.
Dafür muss zur vereinbarten Halbjahresrate von € 3.480 ein Zuschuss in Höhe von € 480 gewährt werden.

d) Im Semester 1 erfolgt keine Rückzahlung. Im Semester 2 werden nur die anfallenden Zinsen zurückbezahlt.

10) Stallbaufinanzierung (L)

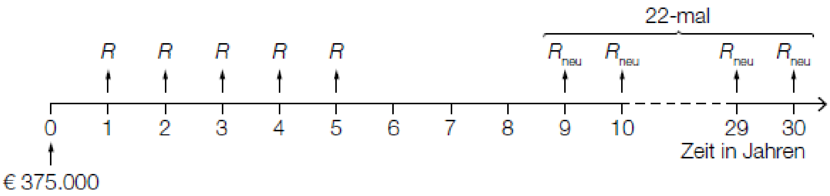
a) $2\,800 \cdot 1{,}023 \cdot \frac{1{,}023^{14} - 1}{0{,}023} \approx 46\,684{,}89$

$65\,000 \cdot 1{,}018^{22} \approx 96\,241{,}96$

$375\,000 - 46\,684{,}89 - 96\,241{,}96 = 232\,073{,}15$

Der Landwirt benötigt noch € 232.073,15.

b)



$375\,000 = 23\,841 \cdot \frac{1{,}048^5 - 1}{0{,}048} \cdot \frac{1}{1{,}048^5} + R_{neu} \cdot \frac{1{,}048^{22} - 1}{0{,}048} \cdot \frac{1}{1{,}048^{30}} \Rightarrow R_{neu} = 29\,436{,}1..$

Die neuen Raten betragen auf ganze Euro gerundet € 29.436.

c) Ansatzformel:

$q = 1 + i$

$375\,000 = \frac{x}{q^5} + R \cdot \frac{q^{20} - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^{19}} \cdot \frac{1}{q^{10}}$